CESI_
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

INTEGRALES MULTIPLES

Point méthode :

1. Pour calculer $\iint f(x,y)dxdy$, nous allons : Représenter le domaine d'intégration,
2. Choisir un ordre d'intégration,
3. Intégrer successivement deux intégrales simples.

EXEMPLE D'APPLICATION EN MECANIQUE :

Pour déterminer le centre d'inertie, d'une plaque Δ, on note $\rho(x,y)$ sa densité surfacique et sa masse M est donnée par $M = \iint_\Delta \rho(x,y)dxdy$. Son centre d'inertie $G = (x_G; y_G)$ est tel que

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta x\rho(x,y)dxdy \\ y_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta y\rho(x,y)dxdy \end{cases}$$

La plaque Δ est un triangle rectangle en O de sommets O(0,0), A(1,0) et B(0,2).

Prenons $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$ alors

$$M = \iint_\Delta \rho(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y\,)dxdy = 8/3$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_\Delta x\rho(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)x\,dxdy = 3/8 \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_\Delta y\rho(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)y\,dxdy = 11/16 \end{cases}$$

DETERMINER LES VALEURS DES INTEGRALES SUIVANTES SUR LEUR DOMAINE D ([CALCULER]):

a) $\boldsymbol{I = \iint (2x - y)^2 dxdy}$ **où $\boldsymbol{D}$ est le parallélogramme limité par les droites d'équation** $\boldsymbol{y = x, y = 2x, y = x + 1\ et\ y = 2x - 2}$

b) $\boldsymbol{I = \iint \frac{\sqrt{y}}{x^2y^2+1} dxdy}$ **où $\boldsymbol{D = \{(x;y)\ avec\ 0 < y < a\,\}}$**

c) $\boldsymbol{I = \iint |x+y| dxdy \; sur \; D} = \{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \; [\mathbf{-1};\mathbf{1}]^{\mathbf{2}}\big|\}$

d) $\boldsymbol{I = \iint \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy \; sur \; D} = \{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \; \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\big| \; \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \leq \mathbf{1}\}$

e) $\boldsymbol{I = \iint xydxdy \; sur \; D} = \{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \; \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\big| \frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2} \leq \mathbf{1}, \boldsymbol{x} > \mathbf{0}, \boldsymbol{y} > \mathbf{0}, \boldsymbol{a} > \mathbf{0}, \boldsymbol{b} > \mathbf{0}\}$

f) $\boldsymbol{I = \iint \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dxdy \; sur \; D} = \{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \; \mathbb{R}^{\mathbf{2}}\big|\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}\}$

g) $\boldsymbol{I = \iint \frac{1}{(x^2+y^2)} dxdy}$ **sur D qui est une couronne limitée par les cercles de centre 0 et de rayons respectifs a et b (0<a<b)**

INTEGRALES TRIPLES

La méthode en 3D est la même. Le calcul d'intégrale triple, est équivalent à un calcul de trois intégrales consécutives en partant de la plus intérieure vers la plus extérieure, c'est une application de nouveau du théorème de Fubini.

$$\boldsymbol{\int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int_{(z)} (\int_{(y)} (\int_{(x)} f(x,y,z)dx)dy)dz}$$

EXEMPLE 1 ([CALCULER]):

Calculer l'intégrale de f(x,y,z)=xyz sur x∈[0,1], y∈[0,2] et z∈[0,3]

$$\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 xyzdxdydz = \int_0^3 \int_0^2 \frac{y^2z^2}{8} dydz = \int_0^3 \frac{z^2}{2} dz = \frac{9}{2}$$

EXEMPLE 2 D'APPLICATION SUR LE CALCUL DU VOLUME D'UNE SPHERE

$V = \int\int\int dxdydz$ sur $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ d'après la propriété de la symétrie

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}$$

EXERCICES ([CALCULER]):

1. $\boldsymbol{I = \iiint e^{x+y+z} dxdydz\ sur\ D}$ où D est le domaine limité par les plans d'équation $\boldsymbol{x = 0; y = 0; z = 0; x + y + z = 1}$

2. $\boldsymbol{I = \iiint \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dxdydz\ sur\ D} = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0\ et\ x + y + z \leq 1}\}$

3. $\boldsymbol{I = \iiint x + y + z dxdydz\ sur\ D} = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{0 < z < x^2 + y^2; 0 < y < x < 1}\}$

4. $\boldsymbol{I = \iiint xyzdxdydz\ \ sur\ D}$

   où D est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0; y = 0; z = 0$ et la sphère de centre O et de rayon 1, dont les points ont des coordonnées positives.

5. Calculer l'intégrale suivante sur une boule de centre O (0 ;0 ;0) et de rayon R

$$\boldsymbol{I = \iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz}$$